

Оксана ЛЯШЕНКО, Леся БУЯК

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ЛЕГАЛЬНОГО ТА НЕЛЕГАЛЬНОГО СЕКТОРІВ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ

*Запропоновано модель взаємодії легальної та тіньової економік за умов економічної трансформації при наявності спільного ринку продукції. У найбільш простому випадку розглянуто агреговану економіку, що виробляє єдиний агрегований суспільний продукт, до якого мають безпосереднє відношення та суспільна група людей, яка володіє засобами виробництва і організовує його, і суспільна група людей, яка своєю працею виробляє агрегований продукт.*

Ключові слова: легальна економіка, тіньова економіка, державне управління економікою, математична модель.

Результатом системної кризи економіки, спричиненої невідповідністю ринкових перетворень суспільним інтересам України, стало поширення тіньової економіки, що істотно порушило баланс інтересів суб'єктів економіки, паритетність розвитку окремих її сфер, мотивацію ефективного господарювання.

Спрошені уявлення про реальні масштаби та якісні особливості тіньової економіки спричиняють негативний вплив на ситуацію, що склалася у цій сфері, як вказує професор В. Мандибур [1], а невраховування реальних масштабів тіньової економічної діяльності, на його думку, призводить до спотворення макроекономічних показників, що зумовлює виникнення значних помилок при прогнозуванні соціально-економічної ситуації та прийнятті управлінських рішень на рівні держави. Науковець [1] зазначає, що не осмисливши того, що відбувається у тіньовій економіці, фактично не можливо проаналізувати існуючі тенденції та повною мірою оцінити реальні процеси, наявні у легальній економіці.

Різними аспектам досліджуваної проблематики приділяли і приділяють увагу такі вітчизняні та зарубіжні вчені: З. Варналій, В. Вольтерра, В. Геєць, В. Григорків, К. Ермаков, А. Жаліло, Ю. Коляда, С. Кордонский, Ю. Латов, В. Мандибур, Д. Чернавский, С. Чернявский.

Тіньова економіка є однією з найбільш гострих проблем сучасного соціально-економічного життя країни, а тому виникає низка питань як теоретичного, так і практичного характеру, без чіткої та максимально об'єктивної відповіді на які економічна політика як у короткотерміновому, так і у довгостроковому плані приречена на неефективність, а у багатьох випадках і на повний провал, як зазначає В. Мандибур [1]. Головним питанням у дискусії про тіньову економіку є таке: чи існує зв'язок і який саме між тіньовою та легальною економіками?

Протягом багатьох років наукових дебатів щодо вибору методів дослідження тіньової економіки сформувалось три домінуючі школи економічної думки: дуалізму, структуралізму і легалізму. Кожна з них має різні точки зору про те, як тіньова і легальна економіки пов'язані між собою. Дуалісти стверджують, що тіньова економічна діяльність мало пов'язана з легальною економікою. Це окремі сектори економіки. Крім цього, працівники тіньового сектору належать до складу менш сприятливого сектору

дуалістичного ринку праці. На відміну від дуалістів, структуралісти розглядають тіньову та легальну економіку у нерозривному зв'язку [2, 3]. На їхню думку, для підвищення конкурентоспроможності підприємства у легальному секторі економіки мають скоротити свої виробничі витрати, в тому числі витрати на робочу силу, сприяючи розвитку тіньового виробництва і тіньових трудових відносин для відповідних економічних одиниць і працівників. Відповідно до поглядів структуралістів як тіньові працівники, так і тіньові підприємства підпорядковані інтересам капіталістичного розвитку, надаючи дешеві товари та послуги [3, 4, 5]. Легалісти зосереджують свої дослідження на відносинах між тіньовими підприємцями і формальною нормативно-правовою базою, а не легальними підприємцями.

*Мета статті* – запропонувати найпростішу модель функціонування легальної та тіньової економік, що дає змогу врахувати економічну структуру суспільства, яку слід розуміти як розподіл громадян, домогосподарств тощо за ліквідними нагромадженнями (заощадженнями) у грошах і цінних паперах, що швидко конвертуються у гроші.

У найпростішому випадку можна розглядати агреговану економіку, яка виробляє єдиний агрегований суспільний продукт, до якого мають безпосереднє відношення та суспільна група людей, яка володіє засобами виробництва і організовує його, та суспільна група людей, яка своєю працею виробляє агрегований продукт. Розглянемо взаємодію легального і нелегального секторів ринкової економіки. Вважатимемо, що всі учасники економіки легально і нелегально виробляють один агрегований товар. Продуктивність технологій у легальному і нелегальному секторах є різною. Попит на продукт легального і нелегального секторів також різний. Інакше кажучи, розглянемо суспільні групи власників капіталу та реальних працівників (робітників). Ціна товарів, вироблених легально і нелегально, відповідно дорівнює  $p_L, p_T$ . В економіці беруть участь  $n_1$  робітників та  $n_2$  власників підприємств. Вони мають заощадження відповідно  $u_1, u_2$ . Робітники отримують у натуральному вимірі легальну зарплату  $s_L$ , з якої платять податок  $\kappa_L^0$  і нелегальну зарплату  $s_T$ , з якої платять "данину"  $\kappa_T^0$ . Робітники витрачають частки  $\alpha_1^L$  і  $\alpha_1^T$  своїх заощаджень на споживання продукту відповідно легального і нелегального секторів  $\alpha_1^L + \alpha_1^T = 1$ .

Власники підприємств витрачають частки  $\alpha_2^L$  і  $\alpha_2^T$  своїх заощаджень на споживання продукту відповідно легального і нелегального секторів. Також вони витрачають частки  $\beta_2^L$  і  $\beta_2^T$  заощаджень на виробничі потреби відповідно в легальному і нелегальному секторах економіки  $\alpha_2^L + \alpha_2^T + \beta_2^L + \beta_2^T = 1$ . Вважатимемо, що співвідношення між споживчими й виробничими витратами власників підприємств є сталим. Позначимо частку виробничих витрат  $B = b_2^L + b_2^T$ ;  $B = const$ ;  $0 < B < 1$ .

Кількість продукту, виробленого в легальному секторі, описує виробнича функція  $F_L(\beta_2^L u_2 / p_L)$ , залежна від капіталозабезпечення на робоче місце на одиницю вартості товару  $\beta_2^L u_2 / p_L$ . Кількість продукту, виробленого в нелегальному секторі, описує виробнича функція  $F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)$ , залежна від капіталозабезпечення на

робоче місце на одиницю вартості товару  $\beta_2^T u_2 / p_T$ . Виробничі витрати на одиницю продукції в легальному і нелегальному секторах дорівнюють відповідно  $\lambda_L, \lambda_T$ . Власники підприємств платять легальний податок  $\kappa_L^1$  на фонд заробітної і "податок"  $\kappa_T^1$  за нелегальну зарплату. Вони також платять податок  $\kappa_L^2$  за легальний і "податок"  $\kappa_T^2$  за нелегальний доходи.

Обсяги споживання продуктів легального і нелегального секторів описують відповідно функції споживання  $Q_L(\alpha_1^L u_1 / p_L), Q_T(\alpha_1^T u_1 / p_T)$ , що залежні від купівельних спроможностей  $\alpha_1^L u_1 / p_L, \alpha_1^T u_1 / p_T$ . Структура споживчих витрат робітників залежить від пропозиції легального і нелегального товару

$$\alpha_1^L = \frac{\Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L)}{\Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L) + \Delta_T F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)}, \alpha_1^T = \frac{\Delta_T F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)}{\Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L) + \Delta_T F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)}, \text{ де}$$

$\Delta_L, \Delta_T$  – частки ринку праці двох секторів. Вважатимемо, що вони пропорційні до

$$\text{капіталозабезпечення у них: } \Delta_L = \frac{\beta_2^L u_2 / p_L}{\beta_2^L u_2 / p_L + \beta_2^T u_2 / p_T}; \Delta_T = \frac{\beta_2^T u_2 / p_T}{\beta_2^L u_2 / p_L + \beta_2^T u_2 / p_T}.$$

Встановимо рівняння моделі. Швидкість зміни заощаджень робітників пропорційна різниці між їхнім доходом від легальної і нелегальної зарплати і видатками на споживання легального і нелегального товарів:

$$\frac{du_1}{dt} = p_L [s_L(1 - \kappa_0^L) - Q_L(\alpha_1^L u_1 / p_L)] + p_T [s_T(1 - \kappa_0^T) - Q_T(\alpha_1^T u_1 / p_T)] \quad (1)$$

Швидкість зміни заощаджень підприємців пропорційна до різниці між їхнім доходом від збуту легального і нелегального товарів і видатками на зарплату робітникам та виробничі потреби:

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} = & \frac{n_1}{n_2} [p_L \Delta_L Q_L(\alpha_1^L u_1 / p_L) + p_T \Delta_T Q_T(\alpha_1^T u_1 / p_T)] - \frac{n_1}{n_2} [p_L s_L \Delta_L (1 + \kappa_L^1) + p_T s_T \Delta_T (1 + \kappa_T^1)] - \\ & - \frac{n_1}{n_2} [p_L \Delta_L (\lambda_L + \kappa_L^2) F_L(\beta_2^L u_2 / p_L) + p_T \Delta_T (\lambda_T + \kappa_T^2) F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)] \end{aligned} \quad (2)$$

Швидкість зміни ціни легального продукту пропорційна до різниці між попитом і пропозицією у легальному секторі:

$$\frac{dp_L}{dt} = \theta_L [n_1 Q_L(\alpha_1^L u_1 / p_L) - \Delta_L n_1 n_2 F_L(\beta_2^L u_2 / p_L)], \quad (3)$$

де  $\theta_L$  – коефіцієнт інерційності.

Швидкість зміни ціни нелегального продукту пропорційна до різниці між попитом і пропозицією у нелегальному секторі.

$$\frac{dp_T}{dt} = \theta_T [n_1 Q_T(\alpha_1^T u_1 / p_T) - \Delta_T n_1 n_2 F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)], \quad (4)$$

де  $\theta_T$  – коефіцієнт інерційності.

Швидкість зміни частки нелегальних виробничих витрат  $\beta_2^T$  пропорційна до показників обсягів легального (нелегального) виробництва:

$$\frac{d\beta_2^T}{dt} = \theta_\beta (1 - D)(D - \varepsilon), \quad (5)$$

де  $\varepsilon$  – мале додатне число, мінімальна частка нелегальних підприємств,  $0 \leq \varepsilon < 1$ ;  $\theta_\beta$  – коефіцієнт інерційності; символом  $D$  позначено

$$D = \frac{rp_L \Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L)}{p_L \Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L) + rp_T \Delta_T F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)},$$

де параметр  $r = r(t)$  ( $r > 1$ ) описує регуляторний вплив. Він вказує частку економіки, до якої розширюється її тінювий сектор.

У рівнянні (5)  $\varepsilon < D < 1$  за всіх значень  $t$ . Рівняння (5) є рівнянням типу Ферхюльста, або логістичним рівнянням, яке описує зростання з верхнім обмеженням. Тут "зростання" стосується розширення тінювого сектору економіки від частки  $\varepsilon$  до 1 (повного поглинання економіки тінювим виробництвом і збутом). Співмножник  $(1 - D)$  описує частку економіки, незайняту тінювим сектором (з поправкою на регуляторний вплив). Співмножник  $(D - \varepsilon)$  описує частку економіки, зайняту тінювим сектором (з тією самою поправкою). Частка легальних виробничих витрат  $\beta_2^L = B - \beta_2^T$ . Показник  $D$  "обсягу легального (і нелегального) виробництва" також легко виразити через капіталовіддачу легального і нелегального секторів:

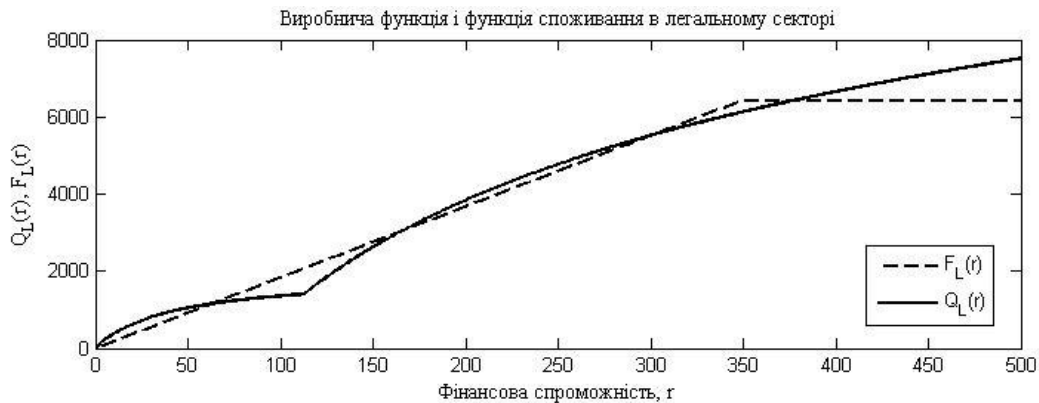
$$D = \frac{rp_L \Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L)}{\beta_2^L u_2 / p_L} \left[ \frac{p_L \Delta_L F_L(\beta_2^L u_2 / p_L)}{\beta_2^L u_2 / p_L} + \frac{rp_T \Delta_T F_T(\beta_2^T u_2 / p_T)}{\beta_2^T u_2 / p_T} \right]^{-1},$$

або через попит на їхню продукцію: 
$$D = \frac{rp_L Q_L(\alpha_1^L u_2 / p_L)}{p_L Q_L(\alpha_1^L u_2 / p_L) + rp_T F_T(\alpha_1^T u_2 / p_T)}.$$

Значення показника  $D$  відображають залежність відносної частини нелегальних виробничих витрат від ефективності легального й нелегального секторів економіки і від попиту на їхню продукцію. Рівняння (1)–(6) мають єдиний розв'язок за початкових умов

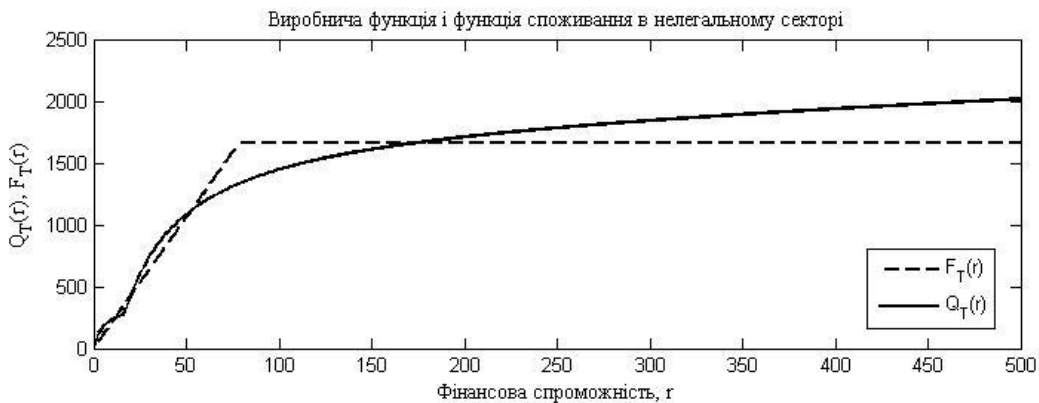
$$u_1^0 = u_1(t_0), \quad u_2^0 = u_2(t_0), \quad p_L^0 = p_L(t_0), \quad p_T^0 = p_T(t_0), \quad \beta_{20}^T = \beta_2^T(t_0). \quad (6)$$

Вони описують взаємодію легального і тінювого секторів ринкової економіки. Застосуємо їх, щоб розкрити основні закономірності взаємодії легальної й тінювої економіки. В описаній економічній системі виникають рівноважні стани, якщо праві сторони рівнянь (1)–(5) дорівнюють нулю. В рівняння (2)–(5) справа записано різницю функцій споживання  $Q_L, Q_T$  і виробничих функцій  $F_L, F_T$ , помножених на параметри. Тому в економіці, що складається з легального і нелегального виробництв, виникають стійкі і нестійкі рівноважні стани, зумовлені рівністю пропозиції легального і нелегального товару й попитом на нього. Виникнення таких рівноважних станів показано на рис. 1, 2.



**Рис. 1. Графіки виробничої функції та функції споживання легального сектору**

Примітка. Побудовано з використанням пакета MATLAB.



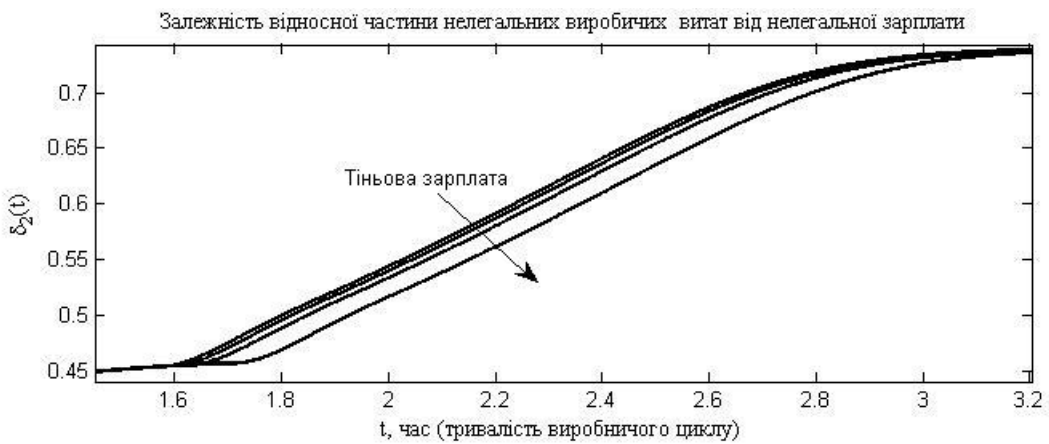
**Рис. 2. Графіки виробничої функції  $F_L(r)$  та функції споживання  $Q_L(r)$  легального сектору**

Примітка. Побудовано з використанням пакета MATLAB.

З рис. 1, 2 зрозуміло, що в економіці з двома секторами – легальним й тінювим – виникає "майже вдвічі" більше рівноважних станів, ніж в односекторній економіці. Вони пов'язані з рівновагою попиту і пропозиції товарів повсякчасного попиту й довготривалого вжитку, виготовлених легально і нелегально. Детально ці рівноважні стани окремо для одного сектору описано на основі базової моделі ринкової економіки. Проте взаємодія двох секторів, зайнятих виробництвом ідентичного товару, один з яких є нелегальним, зумовлює виникнення особливих економічних процесів. Параметри моделі  $\alpha_1^L, \alpha_1^T, \Delta_L, \Delta_T, D$  та її динамічна змінна  $\beta_2^T(t)$  описують різні співвідношення між легальними і нелегальними секторами економіки. Ці співвідношення детерміновано залежать від вибору:

- частки споживчих витрат під час купівлі легального чи нелегального товарів (від параметрів  $\alpha_1^L, \alpha_1^T$ );
- легального чи нелегального місця праці, яке описують параметри  $\Delta_L, \Delta_T$ ;
- частки виробничих витрат на виробництво товарів, описане параметрами  $D, \beta_2^T(t)$ .

Динамічна модель (1)–(6) є моделлю економічного процесу взаємодії тіньової і легальної економік описаного виду. Якщо показники прибутковості в тіньовому секторі вищі за аналогічні показники в легальному секторі, тоді частка тіньового сектору економіки зростає до межі, зумовленої інтенсивністю регуляторної протидії держави. Цю закономірність проілюстровано на рис. 3, а також показано графіки розв'язку  $\beta_2^T(t)$  рівнянь (1)–(6), знайдені за різної величини нелегальної зарплати  $s_T$ . Вони ілюструють зміну розв'язку  $\beta_2^T(t)$  – зміщення "границі" між легальною і нелегальною економіками як показника "зростання з обмеженням". Слід додати, що з рис. 3 також видно, що збільшення нелегальної зарплати сповільнює розширення сектору тіньової економіки. Описане розширення тіньового сектору є наслідком вибору з миттєвою мотивацією. В ній двояко знехтувано суспільними інтересами, оскільки одні власники підприємств відкидають їх вимушено, адже отримують доходи, менші за прожитковий мінімум, інші – добровільно, щоб підвищити показники продуктивності своїх підприємств. Це означає, що для стримування розширення тіньової економіки необхідно виховувати економічну поведінку, умотивовану не миттєвим зиском, а довготривалими суспільними інтересами. Також необхідно шукати засоби покращення умов діяльності малодохідних підприємств й вживати жорстких заходів стосовно власників великих нелегальних підприємств.



**Рис. 3. Графіки розв'язків  $\beta_2^T(t)$  рівнянь (1)–(6) знайдені за різної величини нелегальної зарплати  $s_T$**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

Розглянемо економічну структуру суспільства з легальним й нелегальним секторами. Для цього за формулою (2) виражуємо потенціал власників підприємств щодо виробництва й збуту легального й нелегального товарів:

$$V_L = \frac{n_1}{n_2} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \left[ p_L \Delta_L Q_L \left( \frac{\alpha_1^L u_1}{p_L} \right) + p_L s_L \Delta_L (1 + \kappa_L^1) - p_L \Delta_L (\lambda_L + \kappa_L^2) F_L \left( \frac{\beta_2^L u_2}{p_L} \right) \right] du_2 du_1,$$

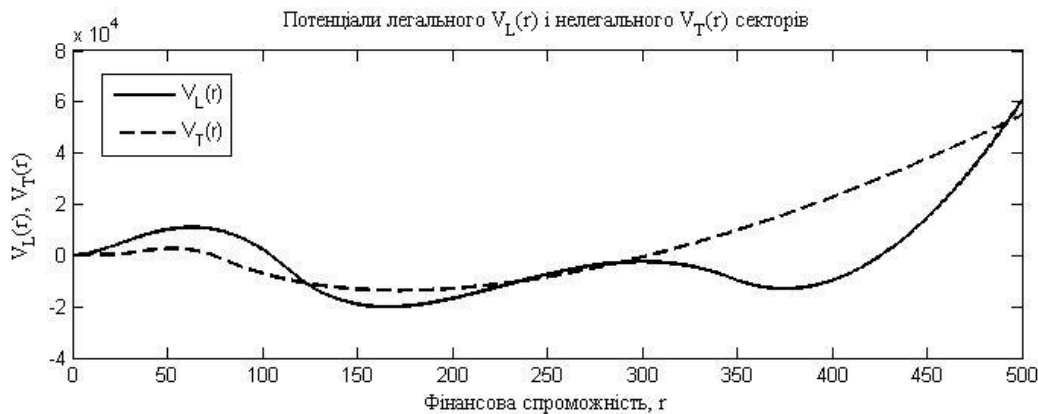
$$V_T = \frac{n_1}{n_2} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \left[ p_T \Delta_T Q_T \left( \frac{\alpha_1^T u_1}{p_T} \right) - p_T s_T \Delta_T (1 + \kappa_T^1) - p_T \Delta_T (\lambda_T + \kappa_T^2) F_T \left( \frac{\beta_2^T u_2}{p_T} \right) \right] du_2 du_1.$$

Нехай  $\alpha_1^L = \beta_2^L$ ,  $\alpha_1^T = \beta_2^T$ . Вважатимемо, що всі робітники є власниками підприємств:  $u_1 = u_2$ , і позначимо фінансову спроможність легального і нелегального виробництв  $r_L = \alpha_1^L u_1 / p_L$ ;  $r_T = \alpha_1^T u_1 / p_T$ . Тоді

$$V_L(r_L) = \frac{n_1}{n_2} \int_0^{r_L} \left[ p_L \Delta_L Q_L(r_L) + p_L s_L \Delta_L (1 + \kappa_L^1) - p_L \Delta_L (\lambda_L + \kappa_L^2) F_L(r_L) \right] dr_L,$$

$$V_T(r_T) = \frac{n_1}{n_2} \int_0^{r_T} \left[ p_T \Delta_T Q_T(r_T) - p_T s_T \Delta_T (1 + \kappa_T^1) - p_T \Delta_T (\lambda_T + \kappa_T^2) F_T(r_T) \right] dr_T.$$

Графіки потенціалів легального  $V_L(r_L)$  і нелегального  $V_T(r_T)$  секторів зображено на рис. 4. На графіку два мінімуми відповідають стійким низькопродуктивним і високопродуктивним станам у відповідних секторах економіки, а координати цих мінімумів не збігаються. Вирахування потенціалів  $V_L(r_L), V_T(r_T)$  дає змогу зробити висновок, що два досліджувані сектори мають окремі вирази фінансової спроможності. В легальному секторі їх виражають грошові заощадження, готівкові й безготівкові. У нелегальному секторі економічну спроможність виражають переважно готівкові гроші, а також інші форми вартості – товари, обмін послугами, обмін виконання роботами.



**Рис. 4. Графіки потенціалів легального  $V_L(r)$  і нелегального  $V_T(r)$  секторів**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

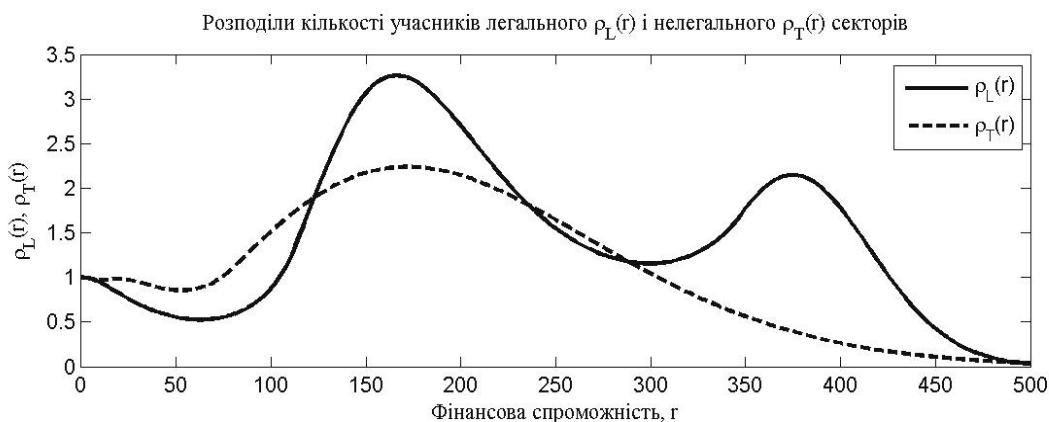
Чотири мінімуми потенціалів  $V_L(r_L), V_T(r_T)$  мають двоякі суспільні наслідки. Низькопродуктивний стійкий стан нелегальної економіки близький до низькопродуктивного стану легальної економіки. Якщо легального потенціалу підприємця бракує для прожиткового мінімуму (нема платоспроможного попиту на його продукцію), тоді він може зберегти економічну активність у нелегальному секторі. І навпаки – успішна нелегальна діяльність з доходами, які слабо перевищують прожитковий мінімум, дає підстави для її легалізації. Такі переходи мають корисні суспільні наслідки. Шкідливі наслідки мають переходи підприємців між близькими легальним і нелегальним стійкими високопродуктивними станами. Якщо легального потенціалу підприємця

достатньо для виробництва товарів довготривалого вжитку, але він (для зиску) переходить з легального стійкого стану у нелегальний, це має найгірші соціально-економічні наслідки. Саме їх пов'язують з негативними наслідками тіньової економіки. Це ухиляння від податків, фінансування корупції та злочинності, руйнування трудової дисципліни, екологічні й трудові порушення, нехтування мораллю й духовністю. Зворотний перехід з нелегального високопродуктивного стану в легальний можливий або внаслідок свідомого вибору, або під тиском держави.

Потенціал легального й нелегального секторів визначає економічну структуру суспільства. Розподіл кількості учасників економіки за легальною і нелегальною фінансовими спроможностями можна визначити за відповідними потенціалами:

$$\rho_L(r_L) = \rho_{0L} \exp(-V_L(r_L)/G^2); \quad \rho_T(r_T) = \rho_{0T} \exp(-V_T(r_T)/G^2),$$

де  $\rho_{0L}, \rho_{0T}$  – коефіцієнти нормування;  $G$  – коефіцієнт дифузії. Графіки розподілів  $\rho_L(r_L), \rho_T(r_T)$  показано на рис. 5. Ці розподіли є бімодальними. Описана економіка має "подвійний бімодальний розподіл" кількості громадян за статками. Це розподіл за легальними й тасмними статками. Тому регуляторне переведення більшості підприємств такої економіки з низькопродуктивного стану у високопродуктивний є дуже складним. Так, спершу необхідно досягнути унімодального розподілу кількості учасників за фінансовою спроможністю, а це неможливо без регуляторного втручання у тіньову економіку. Особливо важливо стимулювати перехід "на легальне становище" тих її учасників, які мають нелегальний дохід на рівні прожиткового мінімуму. Для цього потрібно створювати платоспроможний попит на їхній товар (зміщувати потенціал вверх), а також ліквідувати великі нелегальні виробництва.



**Рис. 5. Графіки розподілів кількості учасників легального  $\rho_L(r)$  і нелегального  $\rho_T(r)$  секторів економіки за фінансовими спроможностями**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

Для ринкової економіки важлива регуляторна стратегія досягнення високопродуктивного стану через створення унімодального розподілу кількості громадян за статками. Проте бімодальний розподіл кількості учасників економіки за нелегальною фінансовою спроможністю приховує наявність дуже великих статків окремих власників.



Тому тіньова економіка є середовищем для створення олігархічного державного режиму, позбавлення громадянських прав більшості населення, узурпації влади. Якщо випадкові доходи у легальних і нелегальних секторах є статистично незалежні, тоді загальний розподіл кількості учасників економіки зза статками  $r = r_L = r_T$  дорівнює добутку  $\rho(r) = \rho_L(r)\rho_T(r)$ . Графік такого розподілу показано на рис. 6. Він також бімодальний. Його встановлено на основі параметрів, що описують легальну й нелегальну економічну діяльність.



**Рис. 6. Графік розподілу кількості учасників легального і нелегального секторів економіки за  $\rho_L(r)\rho_T(r)$  за фінансовою спроможністю**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

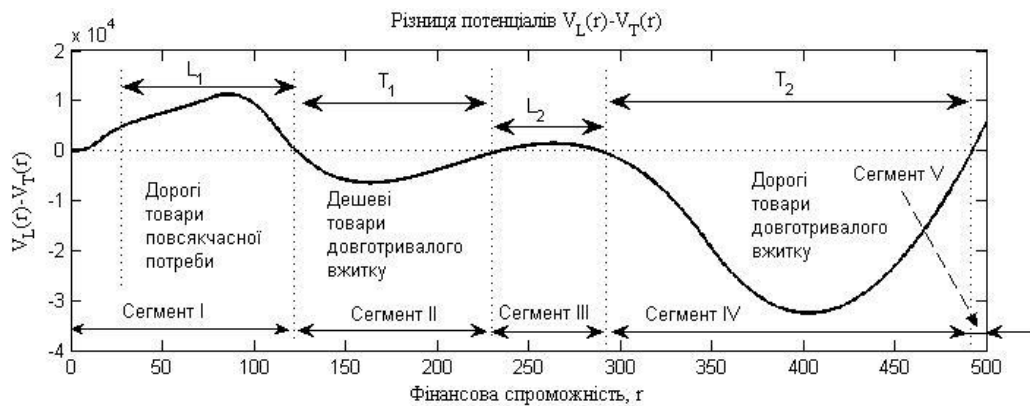
Розглянемо закономірності зміни легальної й нелегальної економічної діяльності. Підприємці вибирають легальну або нелегальну господарську діяльність на основі співвідношення між показниками дохідності першої й другої за наявної фінансової спроможності. Найпростіший такий показник виражений платоспроможним попитом на їхню продукцію. Тобто вибір легальної або нелегальної діяльності залежить від різниці потенціалів:  $\Delta V(r) = V_L(r) - V_T(r)$ . Якщо за наявної фінансової спроможності  $r$  різниця потенціалів  $\Delta V(r) > 0$ , тоді підприємцю більш вигідна легальна діяльність. Якщо  $\Delta V(r) < 0$ , тоді вигідна нелегальна діяльність.

Слід зауважити, що швидкість зміни обсягів виробничих витрат між легальними і нелегальними секторами економіки пропорційна до різниці потенціалів. У позначеннях моделі цю закономірність виражає таке рівняння:

$$\frac{d\theta_\beta}{dt} = \sigma(V_L - V_T), \quad (7)$$

де  $\sigma$  – параметр інерційності. Він описує, наскільки швидко підприємці реагують на зміну співвідношень попитів у легальному і нелегальному секторах. Рівняння (6) описує швидкість переміщення фінансової спроможності між секторами економіки залежно від різниці їхніх потенціалів. Зауважимо, що таке рівняння придатне для моделювання взаємодії довільних секторів економіки, вміщених у спільному полі споживчого попиту. Параметр  $\theta_\beta$  має зміст ціни капіталовитрат легального сектору відносно капіталовитрат нелегального сектору.

Цікаво, що рівняння (1)–(2) описують переміщення заощаджень між учасниками економіки. Інколи їх називають балансовими рівняннями. Вони описують "переміщення заощаджень без втрат". Рівняння (1)–(7) з додатковою початковою умовою  $\theta_\beta^0 = \theta_\beta(t_0)$  описують взаємодію легального і нелегального секторів економіки з урахуванням різниці потенціалів між ними (різниці платоспроможних попитів). Вони моделюють коливання виробничих капіталовитрат у легальному і нелегальному секторах економіки з урахуванням платоспроможних попитів на їхні продукти. Графік різниці потенціалів  $\Delta V(r)$  між легальними і нелегальними секторами економіки зображено на рис. 7. Цей графік ілюструє типову ситуацію щодо співвідношення легальної й нелегальної економіки. Якщо  $\Delta V(r) > 0$ , то підприємцям більш вигідна легальна економічна діяльність, в іншому разі їм вигідна нелегальна економічна діяльність. З рис. 7 випливає, що у взятому прикладі легально більш вигідно виробляти товари повсякчасної потреби (відрізок  $L_1$ ), товари довготривалого вжитку середньої ціни (відрізок  $L_2$ ) і надзвичайно дорогі товари. Нелегально вигідно виробляти (продавати) дорогі товари повсякчасної потреби, дешеві товари довготривалого вжитку (відрізок  $T_1$ ) і дорогі товари довготривалого вжитку (відрізок  $T_2$ ). Цей висновок здебільшого збігається з реальними процесами. Описана закономірність відображає схильність власників підприємств до легальної або нелегальної діяльності залежно від їхнього капіталозабезпечення.

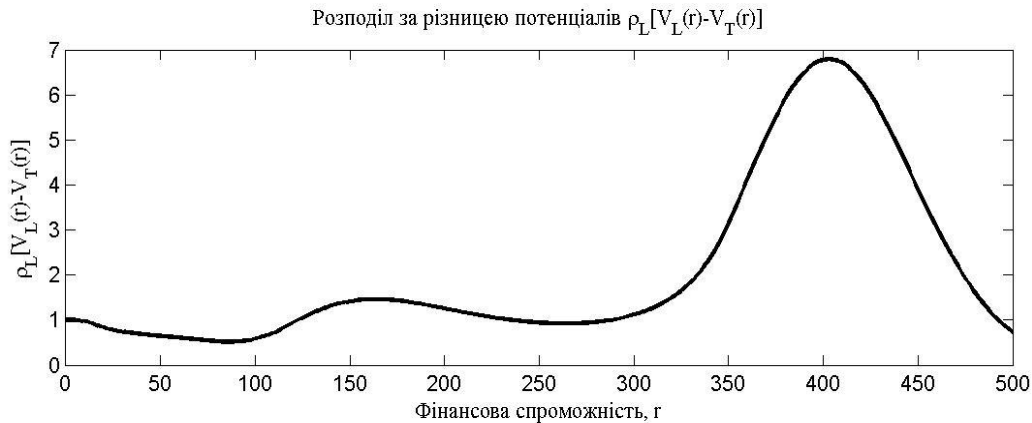


**Рис. 7. Графік різниці потенціалів  $\Delta V(r) = V_L(r) - V_T(r)$  легального і нелегального секторів економіки**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

На рис. 8 показано розподіл кількості учасників економіки, вирахований на основі різниці потенціалів  $\rho_\Delta(r) = \rho_0 \exp(-[V_L(r) - V_T(r)]/G^2)$ , де  $\rho_0$  – коефіцієнт нормування. Цей розподіл дорівнює густині ймовірності того, що легальне фінансове забезпечення перевищує нелегальне на фінансову спроможність  $r$ . Мінімуми цього графіка показують області, де нелегальне виробництво дає більший зиск, ніж легальне виробництво. Порівнюючи графіки на рис. 8 та 1, слід зауважити, що у вибраному прикладі вигідно нелегально виробляти дорогі товари повсякчасної потреби, товари довготривалого вжитку. Це означає, що у різних сегментах модельованої економіки відбуваються окремі, специфічні для них процеси взаємодії легального й нелегального секторів. До таких сегментів належать такі види діяльності: виробництво дешевих

товарів повсякчасної потреби (сегмент I); виробництво дорогих товарів повсякчасної потреби і дешевих товарів щоденного вжитку (сегмент II); виробництво товарів довготривалого вжитку середньої ціни (сегмент III); виробництво дорогих товарів довготривалого вжитку (сегмент IV); виробництво надзвичайно дорогих товарів (сегмент V).



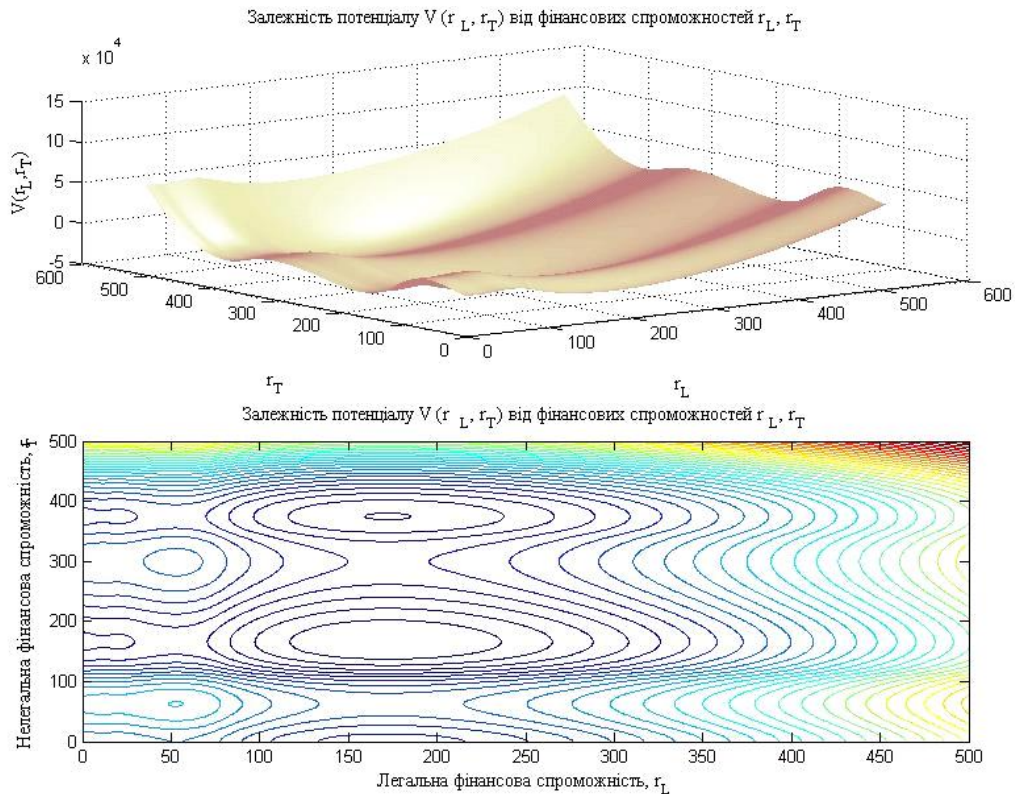
**Рис. 8. Графік розподілу  $\rho(\Delta V)$  кількості учасників економіки за їхньою різницею потенціалів  $\Delta V(r) = V_L(r) - V_T(r)$  легальної та нелегальної діяльності**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

За умов, які наближено відповідають сучасному стану економіки нашої країни, в сегментах I, III і V більш вигідне легальне виробництво. Для подолання нелегального виробництва в сегменті I необхідно стимулювати платоспроможний попит споживачів дешевих товарів. Для подолання нелегального виробництва в сегменті II доцільно впливати на виробників, не підриваючи їхньої фінансової спроможності, – "перевиховувати", давати "податкову амністію", змушувати до підвищення нелегальної зарплати робітникам. Нелегальне виробництво в секторі V є особливо аморальним і злочинним (адже в цьому сегменті здебільшого вигідна легальна діяльність). Щодо нього необхідно вжити жорсткі регуляторні заходи. За умов, які наближено відповідають сучасному стану економіки нашої країни, в сегментах II і IV вигідним є нелегальне виробництво. Для подолання нелегального виробництва в сегменті II необхідно стимулювати споживчий попит на дорогі товари повсякчасної потреби і дешеві товари довготривалого вжитку, одночасно запобігаючи розширенню їхнього тіньового виробництва. Для подолання нелегального виробництва в сегменті IV необхідно вживати специфічні заходи щодо "середнього класу нелегальних виробників". Передусім це збільшення накладних витрат у зв'язку з нелегальною діяльністю, створення умов для її легалізації без суттєвого підриву фінансової спроможності. Жорсткі заходи (конфіскація матеріальних й фінансових ресурсів) не відповідають економічній суті цього сегмента.

Для державного впливу на взаємодію легальних й тіньових секторів економіки необхідний диференційований регуляторний вплив. У моделі (1)–(7) він описаний параметром  $r(t)$ . Для державного впливу на сектори I–V необхідні окремі регуляторні впливи  $r_k(t)$   $k = I, \dots, V$ . Проте реальна практика нерідко діаметрально протилежна цим рекомендаціям. Підприємці, які працюють на межі рентабельності, зазнають найбільш жорсткого регуляторного впливу, а власники великих нелегальних виробництв, навпаки, – звільнені від нього.

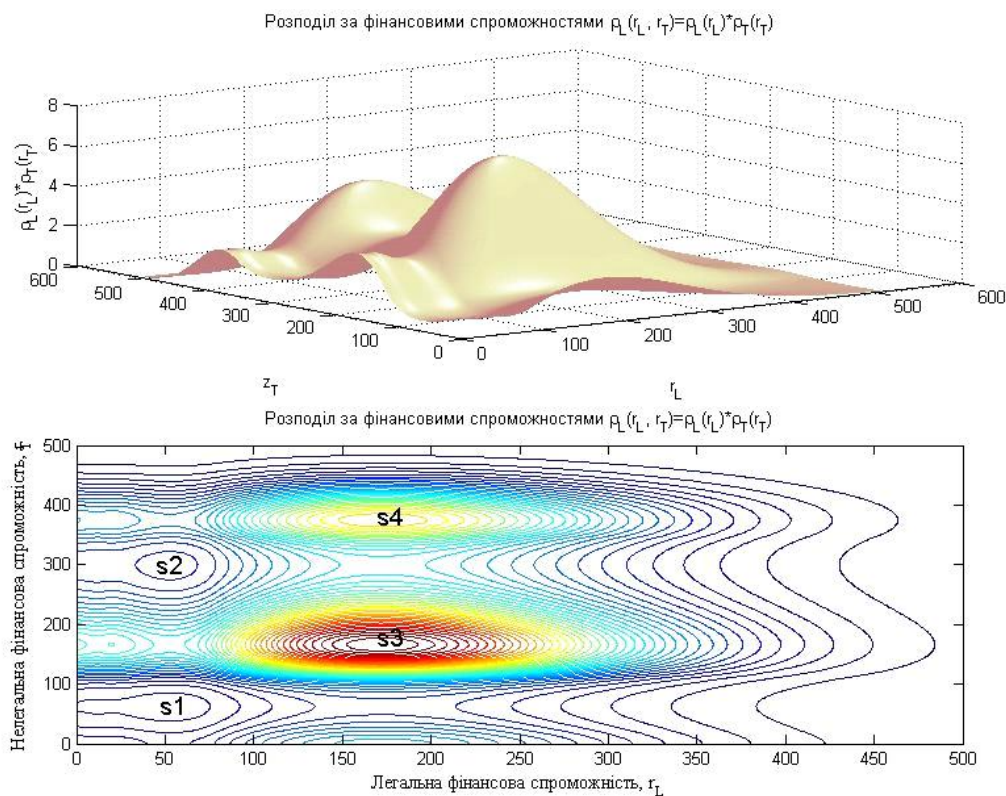
З'ясуємо, які суспільно-економічні групи виникають в економіці з легального й тіньового секторів. Вище (аналізуючи залежність легального і нелегального секторів економіки від їхніх потенціалів) було знехтувано тим, що власники підприємств мають різні форми фінансової спроможності. Легальна фінансова спроможність виражена грошами. А нелегальна – готівковими грошами, товарами і взаємними послугами. Щоб частково врахувати ці відмінності, припустимо, що випадкові зміни доходів і витрат у легальному й тіньовому секторах є статистично незалежні. Тоді потенціал власників підприємств дорівнює сумі їхніх потенціалів легальної й нелегальної діяльності:  $V(r_L, r_T) = V_L(r_L) + V_T(r_T)$ , а розподіл кількості підприємств за їхніми фінансовими спроможностями становить  $\rho(r_L, r_T) = \rho_0 \exp\left(\frac{V_L(r_L) + V_T(r_T)}{G^2}\right)$ . Графіки потенціалу  $V(r_L, r_T)$  і розподілу  $\rho(r_L, r_T)$  показано на рис. 9 і 10. Вони є типовими для низькопродуктивних економік. З рис. 9 і 10 видно, що графік потенціалу має сім локальних мінімумів. По три з них лежать на осях  $(0, r_L)$ ,  $(0, r_T)$ . Ці мінімуми пов'язані з використанням лише одного виду фінансових ресурсів – легального  $r_L$  або тіньового  $r_T$  під час такої діяльності: натуральне виробництво ( $r_L = 0$ ;  $r_T = 0$ ); виробництво легальних товарів повсякчасного попиту ( $r_L > 0$ ;  $r_T = 0$ ); таке саме виробництво товарів довготривалого вжитку; виробництво нелегальних товарів повсякчасного попиту ( $r_L = 0$ ;  $r_T > 0$ ); таке саме виробництво товарів довготривалого вжитку.



**Рис. 9. Графічне зображення залежності потенціалу  $V(r_L, r_T)$  учасників економіки від легальної і нелегальної фінансової спроможності**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

Чотири локальні мінімуми потенціалу  $V(r_L, r_T)$  за  $r_L, r_T > 0$  описують такі види діяльності: виробництво лише товарів повсякчасного попиту на основі легальної й нелегальної фінансових спроможностей на рівні прожиткового мінімуму (позначимо цей вид діяльності номером 1); виробництво товарів повсякчасного попиту і довготривалого вжитку на основі легальної фінансової спроможності на рівні прожиткового мінімуму й нелегальної фінансової спроможності на рівні середніх виробничих потреб (2-й вид діяльності); виробництво товарів повсякчасного попиту і довготривалого вжитку на основі нелегальної фінансової спроможності на рівні середніх виробничих потреб і легальної фінансової спроможності на рівні прожиткового мінімуму (3-й вид діяльності); виробництво товарів повсякчасного попиту і довготривалого вжитку на основі нелегальної й легальної фінансової спроможності на рівні середніх виробничих потреб і вище (4-й вид діяльності).



**Рис. 10. Розподіл  $\rho(r_L, r_T)$  кількості учасників економіки від легальної і нелегальної фінансової спроможності**

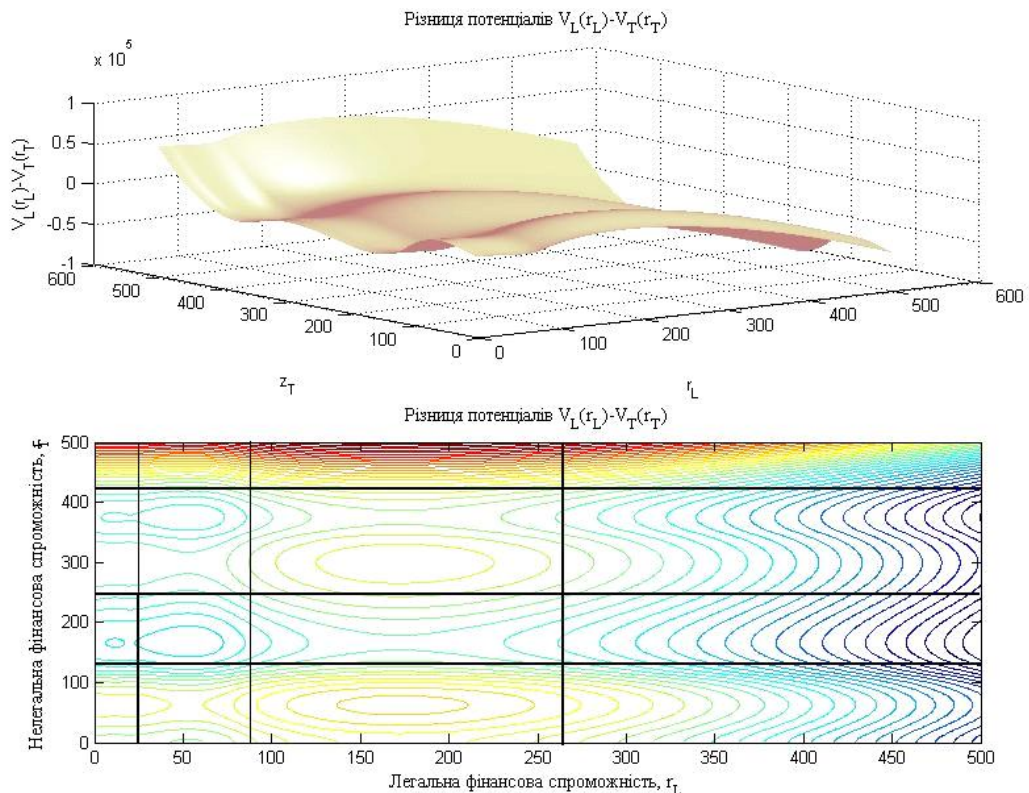
*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

Такі види економічної діяльності пов'язані з утворенням відповідних економічних груп. На рис. 10 символами  $s1 - s4$  позначено максимуми розподілу  $\rho(r_L, r_T)$  кількості учасників економіки за легальною і нелегальною фінансовими спроможностями  $r_L, r_T$ . Ці максимуми описують чотири суспільні групи, які зайняті відповідними видами легальної й нелегальної діяльності. Групі учасників економіки  $s1$  бракує обох видів

економічної спроможності – легальної й нелегальної. Учасникам групи s2 бракує легального фінансового ресурсу. Тому регуляторний вплив щодо них має поєднувати стимулювання попиту на їхню продукцію й стримування їхньої нелегальної діяльності. Учасники групи s3 мають легальну й нелегальну економічну спроможність, достатню для виробництва товарів повсякчасного попиту й дешевих товарів довготривалого вжитку. Це "середній клас" нелегальної економіки. Для держави важливо не знищувати його, а перевести на легальну форму діяльності.

Учасники групи s4 мають високу легальну й нелегальну економічну спроможність. Проте їм вигідно підвищувати показники дохідності своїх підприємств, виконуючи частину робіт нелегально. Для держави важливо перевести їхню діяльність у легальну форму, застосовуючи відповідні санкції.

У наведеному прикладі потенціал  $V(r_L, r_T)$  зростає при великих  $r_L, r_T$ , а тому в розподілі  $\rho(r_L, r_T)$  можливий "втікаючий хвіст". Це означає, що власникам найбільших підприємств вигідне нелегальне виробництво. Їхня нелегальна виробнича діяльність є однією з головних причин бідності більшості населення й низької продуктивності малих і середніх підприємств та тісно пов'язана з корупцією й узурпацією влади.

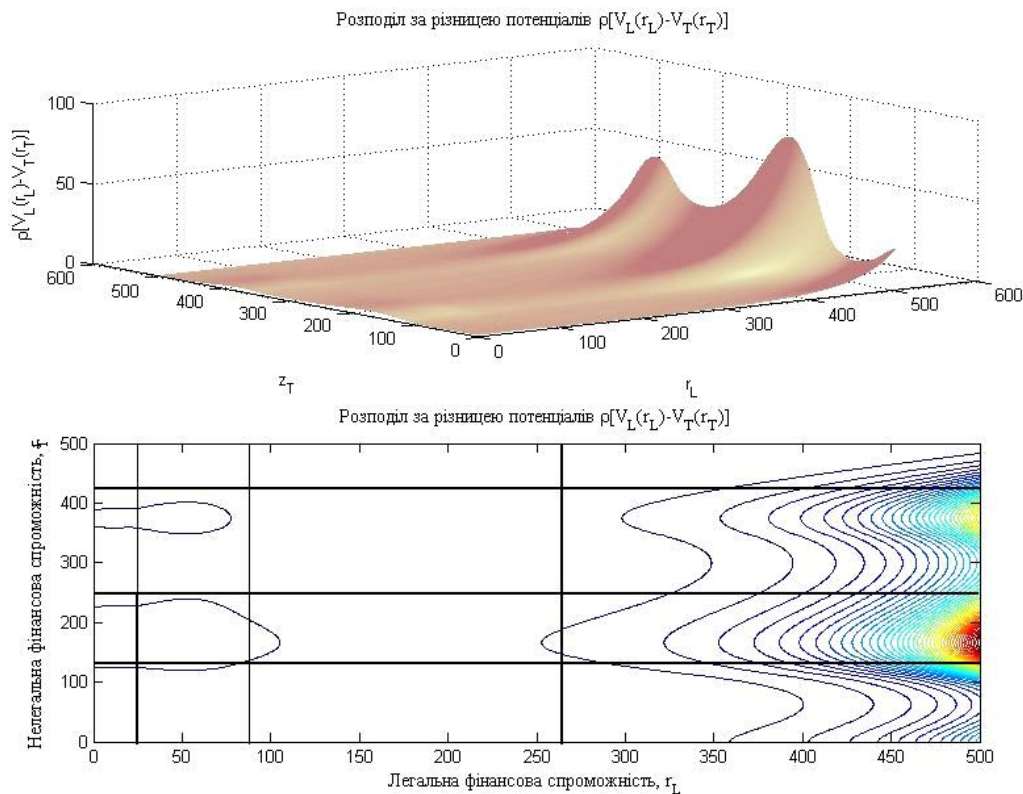


**Рис. 11. Графік різниці потенціалів  $\Delta V(r_L, r_T) \Rightarrow V_L(r_L) - V_T(r_T)$  легального і нелегального секторів економіки**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.



Розглянемо різницю потенціалів  $\Delta V(r_L, r_T) \rightarrow V_L(r_L) - V_T(r_T)$  і відповідний їй розподіл  $\rho_\Delta(r_L, r_T) = \rho_0 \exp\left(\frac{[V_L(r_L) - V_T(r_T)]}{G^2}\right)$ . У наведеному прикладі різниця потенціалів  $\Delta V(r_L, r_T)$  збільшується при великій нелегальній фінансовій спроможності і меншає за великої легальної фінансової спроможності (рис. 11). Це пов'язано з різницею дохідностей легальної і нелегальної економічної діяльності, котра *a priori* призводить до виникнення тіньової економіки. Повторимо, що розподіл  $\rho_\Delta(\Delta V(r_L, r_T))$  дорівнює густині ймовірності того, що легальне фінансове забезпечення перевищує нелегальне на фінансову спроможність  $r_L - r_T$ . Мінімуми  $\rho_\Delta(\Delta V(r_L, r_T))$  відповідають областям, де нелегальне виробництво більш вигідне за легальне. Графік має локальні максимуми й мінімуми. Вони розміщені приблизно за "квадратно-гніздовим методом" (рис. 12). Це означає, що двовимірний простір капіталозабезпечення  $(r_L, r_T)$  мозаїчно поділений на області, де власникам підприємств зручніше виробляти то легальний, то нелегальний товари.



**Рис. 12. Графік розподілу  $\rho_\Delta(\Delta V(r_L, r_T))$  кількості учасників економіки за їхньою різницею потенціалів легальної і нелегальної діяльності**

*Примітка.* Побудовано з використанням пакета MATLAB.

Слід додати, що регуляторний вплив на співвідношення між тіньовою й легальною економікою  $r_k$  ( $k = 1, \dots, V$ ) потребує витрат державних коштів. Ефект від них описує

певна функція  $r_k = R_k(u_g)$  ( $k = 1, \dots, V$ ), що має властивості виробничих функцій, де  $u_g$  – кількість державних коштів, спрямованих на подолання тіньової економіки.

Запропоновані математичні методи моделювання взаємодії легального й нелегального секторів економіки придатні для дослідження взаємного впливу секторів ринкової економіки, крім того, вони можуть бути використані для моделювання наслідків державного регуляторного впливу на тіньову економіку і для розробки механізмів такого впливу.

### **Література**

1. Мандибура В. Тіньова економіка як об'єкт системного наукового дослідження [Електронний ресурс] / В. О. Мандибура. – Режим доступу : <http://biblioteka.org.ua/book.php?id=1116673847&p=8>.
2. Латов Ю. Экономика вне закона (Очерки по теории и истории теневой экономики) / Ю. В. Латов. – М. : Моск. обществ. науч. фонд, 2001. – 156 с.
3. Чернявский С. Теневая экономика в Украине [Електронний ресурс] / С. Н. Чернявский. – Режим доступу : <http://masters.donntu.edu.ua/publ2002/fem/chernyavsky.pdf>.
4. Ермаков К. Теневая экономика: анализ и моделирование / К. М. Ермаков. – М. : Фин. и стат., 2004. – 408 с.
5. Кордонский С. Теневая экономика в теневом обществе (Трансформации административного рынка) [Електронний ресурс] / С. В. Кордонский. – Режим доступу : <http://old.russ.ru/antolog/predely/4/kordon.htm>.
6. Чернавский Д. О проблемах физической экономики / Д. С. Чернавский, Н. И. Старков, А. В. Щербаков // УФН. – 2002. – Т. 172, № 9. – С. 1045–1066.
7. Коляда Ю. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки : моногр. / Ю. В. Коляда. – К. : КНЕУ, 2011. – 297 с.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1976. – 288 с.
9. Тіньова економіка: сутність, особливості та шляхи легалізації : моногр. / [З. С. Варналій, А. Я. Жаліло та ін.] ; за ред. д.е.н., проф. З. С. Варналія. – К. : НІСД, 2006. – 576 с.

Редакція отримала матеріал 21 травня 2012 р.