ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Микола НЕДАШКОВСЬКИЙ, Лідія СЕМЧИШИН

Розглянуто міжгалузеві моделі та їх місце серед моделей економічної динаміки. Запропоновано узагальнені динамічні моделі замкнутої виробничої системи. Проаналізовано економічне зростання при різних траєкторіях споживання. Проведено аналіз пропорцій розширеного відтворення та узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі. Створено оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу та запропоновано ефективний метод реалізації цих моделей.

Ключові слова: *міжгалузеві моделі, міжгалузевий баланс, моделі економічної динаміки, розширене відтворення, траєкторії споживання.*

Застосування математичних методів в економічних дослідженнях передбачає використання математики як особливого способу вивчення економічних закономірностей і одержання теоретичних та практичних економічних висновків.

Економіко-математичні дослідження, що проводяться в країні, охоплюють важливі економічні проблеми на різних рівнях планування та управління – народногосподарському, галузевому, регіональному, а також на рівні підприємств.

Зазначимо, що питання вивчення міжгалузевих моделей в економіко-математичних дослідженнях *актуальне*, відповідає на важливі методологічні та змістовні питання економічної науки, допомагає оцінити можливості та перспективи використання математичного моделювання в економіці.

У значній кількості прикладних задач виникає необхідність використання динамічних міжгалузевих моделей в економіці. Питання міжгалузевих моделей розглядаються у багатьох *публікаціях* вітчизняних та зарубіжних вчених. Використанню міжгалузевих моделей присвячені роботи В. С. Григорківа [1], М. Інтрилігатора [2], А. Ф. Кабака [3], І. М. Ляшенка [4], А. С. Солодовнікова, В. А. Бабайцева, А. В. Браілова [5].

Метою даного дослідження є аналіз економічного зростання при різних траєкторіях споживання, пропорцій розширеного відтворення та узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі, створення оптимізаційної моделі з матрицями міжгалузевого балансу.

Перші варіанти моделей міжгалузевих балансів були розроблені ще у 20-30 рр. ХХ ст., однак знакові наукові результати в розробці таких моделей пов’язані з іменем видатного американського економіста, професора Гарвардського університету й лауреата Нобелівської премії В. В. Леонтьєва, якому власне й належить одна з найбільш простих та вагомих макроекономічних моделей міжгалузевих зв'язків.

1. Узагальнена динамічна модель Леонтьєва

Відмінною ознакою теоретичних міжгалузевих динамічних моделей є опис співвідношень "витрати – випуск" у формі матриць міжгалузевого балансу, де кожен вид продукції представлений тільки одним виробничим способом, а в межах кожного способу передбачено випуск лише одного виду продукту. Місце динамічних міжгалузевих моделей серед моделей економічної динаміки визначають за трьома факторами:

1. Вони є деталізованими (дезагрегованими) аналогами моделей відтворення валового внутрішнього продукту (ВВП) і національного доходу.

2. Моделі є узагальненням статичних (балансових і оптимізаційних) міжгалузевих моделей.

3. Моделі є теоретико-методологічною основою прикладних динамічних моделей з матрицями міжгалузевого балансу.

Запропонована В. Леонтьєвим динамічна міжгалузева модель є класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. Її місце в системі моделей народногосподарського рівня можна трактувати двояко:

1) як дезагрегування найпростішої моделі відтворення ВВП продукту і національного доходу;

2) як динамізацію статичної моделі міжгалузевого балансу.

Побудуємо модель згідно з першим методом.

Найпростіша узагальнена модель відтворення валового внутрішнього продукту може бути записана у виді:

$$x(t) = a(t)x(t) + b(t)\frac{dx(t)}{dt} + c(t). \tag{1}$$

При дезагрегуванні цієї моделі до галузевого рівня ендогенні та екзогенні змінні $x(t),\ \frac{dx(t)}{dt},\ c(t)$ замінюються векторами стовпцями $X(t),\ \frac{dX(t)}{dt},\ C(t)$, а параметри a і b – квадратними матрицями A і B. Отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого степеня, нерозв'язану відносно похідних узагальнену динамічну модель В. Леонтьєва:

$$X(t) = A(t)X(t) + B(t)\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \tag{2}$$

де $X(t) = [x_j(t)]$ – вектор-стовпець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва;

$C(t)$ – вектор-стовпець споживання (разом із невиробничим нагромадженням);

$A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відшкодування вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів) $(i, j \in J,\ J = \{1,..., n\})$;

$B(t) = \left(b_{ij}(t)\right)$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції) $(i, j \in J,\ J = \{1,..., n\})$.

В такому випадку статистична модель міжгалузевого балансу може бути записана як:

$$X = A(t)X(t) + Y(t)$$

або

$$X = \left(E - A(t)\right)^{-1} Y(t),$$

де $\left(E - A(t)\right)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних потреб у випуску продукції для одержання одиниць відповідних видів кінцевої продукції.

Відповідність між статичною і динамічною моделями міжгалузевого балансу для кожного t встановлюють за допомогою матричного рівняння:

$$Y(t) = B(t)\frac{dX(t)}{dt} + C(t). \tag{3}$$

Оскільки $\dfrac{dX(t)}{dt} = \left(E - A(t)\right)^{-1}\dfrac{dY(t)}{dt}$, то замість (2) можна досліджувати систему диференціальних рівнянь:

$$Y(t) = B(t)\left(E - A(t)\right)^{-1}\frac{dY(t)}{dt} + C(t), \tag{4}$$

де $B(t)\left(E - A(t)\right)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повного приросту капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів використовуваного національного доходу.

Припускають, що $A(t)$ – матриця продукції. У подальшому аналізі зручно вважати матрицю $A(t)$ нерозкладною, а матрицю $B(t)$ – невиродженою. Тоді

$$\left(E - A(t)\right)^{-1} > E + A(t),$$
$$B(t)\left(E - A(t)\right)^{-1} > B(t).$$

Далі розглянемо також випадок, коли матриці $B(t)$ і $B(t)\left(E - A(t)\right)^{-1}$ включають не все виробниче нагромадження, а тільки нагромадження основних виробничих фондів.

На перший погляд ці припущення неприпустимо штучні, оскільки дійсні матриці $A(t)$, як правило, розкладні, а матриці $B(t)$ мають нульові рядки (зокрема, за галузями, що виробляють тільки предмети споживання). Однак після зведення системи (4) до рівнянь тільки для фондоутворюючих галузей обидва припущення стають цілком правомірними.

Очевидно, що економічне значення мають тільки розв'язки $X(t) > 0$. Аналогічну вимогу в моделі без зовнішньої торгівлі може бути накладено на вектор $Y(t)$. Як буде описано далі, економічним передумовам моделі (2) відповідають тільки неспадні траєкторії $X(t)$, тобто $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. Розв'язок системи (4) при $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ через невід'ємність матриць $(E - A(t))^{-1}$ та $B(t)(E - A(t))^{-1}$ гарантує, що $Y(t) \geq 0$ і $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. Однак останні умови можуть бути виконані і тоді, коли окремі компоненти вектора $\frac{dY(t)}{dt}$ від'ємні.

Відповідно до теорії диференціальних рівнянь розв'язок систем (2) і (4) здійснюють в три етапи:

а) визначають загальний розв'язок однорідної системи рівнянь при $C(t) = 0$;
б) знаходять частковий розв'язок неоднорідної системи;
в) з початкових умов обчислюють невизначені сталі загального розв'язку.

2. Динаміка замкнутої виробничої системи

Проаналізуємо систему однорідних рівнянь:

$$Y(t) = B(t)(E - A(t))^{-1} \frac{dY(t)}{dt}. \tag{5}$$

Економічний зміст розв'язку цієї системи полягає в тому, що він характеризує граничні технологічні можливості розвитку виробництва при заданих матрицях A і B, коли всі ресурси національного доходу спрямовуються на розширене відтворення.

$A(t)$ - матриця розміру $n \times m$, елементи якої є поліномами від t. Припустимо, що значення для t і коефіцієнтів многочленів беруться з деякого поля F таким чином: елементи матриці $A(t)$ обчислюються для деякого часткового значення t, наприклад, $t = t_0 \in F^{n\times m}$. $B(t)$ - вектор $(a_{1,m}(t), a_{2,m}(t), ..., a_{n,m}(t))^T$. Матриця $A(t)$ і вектор $B(t)$ мають степінь l, тобто $A(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i t^i$, $B(t) = \sum_{i=0}^{l} B_i t^i$, $(i = \overline{1,n})$, $\frac{dY(t)}{dt} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}$.

Представимо матрицю $A(t)$ і вектор $B(t)$ у вигляді матричних многочленів: $A(t) = t^l A_0 + t^{l-1} A_1 + ... + A_l$ та $B(t) = t^l B_0 + t^{l-1} B_1 + ... + B_l$. Розв'язок системи шукається у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами.

$X(t)=\sum_{j=0}^{nl} t^j x_{nl-j} \Big/ \sum_{j=0}^{nl} t^j y_{nl-j}$, де $x_0, x_1, ..., x_{\ln}$ – вектори розмірності r, а $y_0, y_1, ..., y_{\ln}$ – скалярні величини. Тоді систему (5) можна записати наступним чином.

$$Y(t)=\frac{t^l B_0 + t^{l-1} B_1 + ... + B_l}{E-\left(t^l A_0 + t^{l-1} A_1 + ... + A_l\right)} \cdot \frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{\Delta t},$$

$$Y(t)=\frac{t^l B_0 + t^{l-1} B_1 + ... + B_l}{E-\left(t^l A_0 + t^{l-1} A_1 + ... + A_l\right)} \cdot y(t),$$

$$Y(t)=\left(t^l B_0 + t^{l-1} B_1 + ... + B_l\right) \cdot \left(E-\left(t^l A_0 + t^{l-1} A_1 + ... + A_l\right)\right)^{-1} \cdot y(t),,$$

Оскільки $A(t) \in F^{n \times m}$, а $B(t) \in F^n$, то в загальному випадку, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях , одержимо числову систему $m(l+s+1)$ рівнянь з $m(s+1)$ невідомими y_{ij} і $(s+1)$ невідомими y_j .

$$\begin{cases} A_0 B_0 - B_0 y_0 = 0; \\ A_0 X_1 + A_1 X_0 - \left(B_0 y_1 + B_1 y_0\right) = 0; \\ A_0 X_2 + A_2 X_0 + \left(B_0 y_2 + B_1 y_1 + B_2 y_0\right) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{s=0}^{l} A_s X_{p-s} - \sum_{s=0}^{l} B_s y_{p-s} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{l-1} X_{nl} + A_l X_{nl-1} - \left(B_{l-1} X_{nl} + B_l X_{nl-1}\right) = 0; \\ A_l X_{nl} - B_l y_{nl} = 0. \end{cases}$$

Для розв'язання даної системи може бути застосована обчислювальна схема розрізання, запропонована в [6, 147]. Загальний розв'язок системи може бути поданий у вигляді:

$$Y_1(t)=\sum_{l=1}^{l} d_l K_l e^{\lambda_l t}, \tag{6}$$

де λ_l – корені характеристичного рівняння n-го порядку

$$\det\left(E-\lambda B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}\right)=0. \tag{7}$$

(λ_l збігаються з величинами, оберненими до власних значень матриці $B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}$);

K_l – відповідні до λ_l, власні вектори матриці $B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}$, тобто нетривіальні розв'язки системи однорідних рівнянь

$$\left[E-\lambda_l B(t)\left(E-A^{-1}(t)\right)\right]K_l = 0. \quad (8)$$

Деякі корені λ_l, можуть виявитися комплексними. Разом з тим, будь-якому комплексному кореню відповідає спряжений до нього. Кожна пара комплексно спряжених коренів $\lambda = \alpha \pm i\beta$ подана в (6) парою доданків $Ce^{\alpha t}\cos\beta t + De^{\alpha t}\sin\beta t$, де C і D – постійні вектори розмірності n, що породжують коливання з постійною частотою p та амплітудою $e^{\alpha t}$.

Величини d_l у формулі (6) є невизначеними сталими, що однозначно визначаються з початкової умови $Y_1(0) = Y(0)$. Або

$$\sum_{l=1}^{n} d_l K_l = Y(0). \quad (9)$$

Остання рівність є системою з n лінійних рівнянь відносно $d_1,...,d_l$, яка має єдиний розв'язок.

У загальному випадку немає підстав розраховувати на те, що у розв'язку системи (9) відмінною від нуля буде єдина компонента d_l. Отже у типовій ситуації єдина траєкторія системи (5), яка виходить з початкової точки $Y(0)$, є комбінацією експонент, що зростають різними темпами. Останнє твердження вказує на істотну відмінність міжгалузевої моделі від її макроекономічного прототипу.

Але певна схожість розв'язків однорідних макроекономічної та міжгалузевої моделей зберігається. Це стає очевидним з наведених нижче міркувань.

Відповідно до прийнятих припущень, матриця $B(E-A)^{-1}$ додатна. Відповідно до теореми Перрона [7, 319–321] вона має додатне власне число $\hat{S}$ (корінь Фробеніуса – Перрона), що за абсолютною величиною є більшим ніж усі інші власні числа цієї матриці, а також відповідний строго додатний власний вектор $\hat{K}$. При цьому власні вектори, що відповідають відмінним від $\hat{S}$ власним значенням, з необхідністю мають компоненти різних знаків.

З теорії невід'ємних матриць відомо, що корінь Фробеніуса – Перрона знаходиться між максимальною і мінімальною сумами елементів стовпців матриці $B(E-A)^{-1}$. Позначимо через $\widetilde{B}_j = \sum_{i\in J}\beta_{ij}$ суму елементів j - го стовпця цієї матриці, тобто повну капіталомісткість продукції j - ї галузі.

Тоді

$$\min_j \tilde{\beta}_j \le \hat{S} \le \max_j \tilde{\beta}_j .$$

Разом з тим, параметр $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{S}}$, що належить розв'язку (6) як показник експоненти, знаходиться в проміжку

$$\min_j \frac{1}{\tilde{\beta}_j} \le \hat{\lambda} \le \max_j \frac{1}{\tilde{\beta}_j} . \quad (10)$$

Таким чином, показник експоненти є оберненою величиною до деякої середньої з повних галузевих капіталомісткостей. У випадку ж їхньої рівності $\left(\hat{B}_j = B_0,\ j = 1,...,n\right)$ $\hat{\lambda}$ збігається з $\hat{\rho} = \frac{1}{B_0}$, що стає підставою називати величину $\hat{\lambda}$ технологічним темпом приросту в міжгалузевій динамічній моделі (2).

Траєкторія $Y_1(t)$, пов'язана з початковими умовами рівностями (9), є сумою експонент. Очевидно, що при $t \to \infty$ в ній починає переважати доданок з максимальною (серед номерів l з $d_l \ne 0$) дійсною частиною λ_l. Можливі дві взаємовиключні ситуації:

1) домінуючою є експонента $e^{\hat{\lambda} t}$;

2) домінує інший доданок з темпом λ_l, який відмінний від $\hat{\lambda}$.

У першому випадку темпи приросту продукції кожної галузі при $t \to \infty$ прямують до технологічного темпу зростання $\hat{\lambda}$, а гранична галузева структура національного доходу визначається пропорціями між компонентами власного вектора $\hat{K}$.

У другому випадку динаміка $Y_1(t)$ усе більше визначається власним вектором K_l, що відповідає власному значенню $\frac{1}{\lambda_l} \ne \hat{S}$ з матриці $B(E-A)^{-1}$. Такий власний вектор, як було зазначено вище, обов'язково має компоненти різних знаків. Тому при досить великих t у розв'язку $Y_1(t)$ неодмінно з'являються від'ємні компоненти і тим самим втрачається економічний зміст розв'язку. Ще раніше спадні компоненти з'являються у траєкторії

$$X_l(t) = \sum_{l=1}^{n} d_l (E-A)^{-1} K_l e^{\lambda_l t}, \quad (11)$$

що також суперечить припущенням моделі. Така ситуація є дуже ймовірною.

Наприклад, матриця $B(E-A)^{-1}$ може мати додатнє власне число $S_l < \hat{S}$. Тоді в сумі (6) з'явиться доданок виду $d_l K_l e^{\lambda_l t}$, де $\lambda_l = \frac{1}{S_l} > \hat{\lambda}$, а вектор K_l має компоненти різних знаків. Завдяки рівності $S_l K_l = B(E-A)^{-1} K_l$ вектор $(E-A)^{-1} K_l$, що входить у суму (11) при $e^{\lambda_l t}$, також має знакозмінні компоненти, внаслідок чого стають від'ємними деякі компоненти $\frac{dX_l}{dt}$.

Отже, розв'язок (6), у якому домінує доданок з темпом, відмінним від $\hat{\lambda}$, економічно неприйнятний.

Зазначені особливості розв'язків однорідного рівняння (5) є принциповими відмінними рисами міжгалузевої моделі (2), порівняно з її макроекономічним аналогом, де розв'язок втрачає допустимість тільки в результаті надмірних вимог до зростання споживання.

3. Економічне зростання при різних траєкторіях споживання

Проаналізуємо траєкторії економічного розвитку, що враховують динаміку споживання [8, 35]. Подамо загальний розв'язок системи (4) у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи $Y_1(t)$ і часткового розв'язку $Y_2(t)$:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t). \qquad (12)$$

Траєкторію споживання розглядатимемо у вигляді $C(t) = C(0)e^{rt}$, тобто вважатимемо, що компоненти вектора споживання зростають з однаковим постійним темпом $r \geq 0$, причому $C(0) \geq 0$. При $r = 0$ маємо $C(t) = C(0) = const.$

Частковий розв'язок $Y_2(t)$ визначають так:

$$Y_2(t) = \left[E - rB(t)\left(E - A(t)\right)^{-1}\right]^{-1} C(0)e^{rt} \qquad (13)$$

а невизначені сталі q_1 загального розв'язку знаходяться з розв'язку системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i K_i = Y(0) - \left[E - rB(t)\left(E - A(t)\right)^{-1}\right]^{-1} C(0). \qquad (14)$$

Отже, загальний розв'язок (12) набуває вигляду:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i K_i e^{\lambda_i t} + \left[E - rB(t)\left(E - A(t)\right)^{-1}\right]^{-1} C(0)e^{rt}. \qquad (15)$$

При відомих (однозначно визначених) значеннях K_i, λ_i часткові розв'язки знаходять шляхом вказування темпу приросту споживання r і розрахунку, відповідних заданому r, значень q_1.

Аналіз максимально допустимого значення r можна проводити так, як і аналіз макромоделі [8, 34-36] у випадку, коли темп приросту споживання дорівнює технологічному темпу приросту національному доходу.

Покажемо, що r не повинно перевищувати технологічного темпу приросту. Дійсно, з $r > \lambda$ випливає:

а) доданок $Y_2(t)$ у (15) зростає за абсолютною величиною швидше, ніж доданок, що містить $e^{\lambda t}$;

б) матриця $rB(E-A)^{-1}$ непродуктивна і через це вектор $Y_2(t)$ не може бути невід'ємним.

Оскільки деякі компоненти $Y_2(t)$ від'ємні, то починаючи з деякого t у векторі $Y(t)$ з'являються від'ємні компоненти, що економічно неприпустимо. Робимо висновок: необхідною умовою існування траєкторії зростання національного доходу, що має економічну інтерпретацію, є $r < \lambda$.

Невід'ємність $Y_2(t)$ згідно з (5) еквівалентна нерівності $\left[E - rB(E-A)^{-1}\right]^{-1} C(0) \geq 0.$ Це означало б, що рівняння $Y - rB(E-A)^{-1} Y = C(0)$ при $C(0) \geq 0$ має невід'ємний розв'язок $Y = \widehat{Y}$. У цьому випадку, згідно з визначенням продуктивності, матриця $rB(E-A)^{-1}$, будучи нерозкладною, виявилася б продуктивною. Тим часом відомо, що умовою продуктивності $rB(E-A)^{-1}$ є нерівність $r < \hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{s}}$.

Можуть бути проаналізовані якісно різні ситуації в рамках виконання умови $0 < r\hat{\lambda} < 1$. Тут проявляються схожі властивості результатів макроекономічної і міжгалузевої моделей. Однак повної еквівалентності результатів не існує. Відмінності поведінки розв'язку (15) при різних r від поведінки розв'язку макромоделі можна пояснити впливом міжгалузевих зв'язків, галузевої структури початкових умов (векторів $Y(0)$ і C_0).

Однією з найбільш характерних властивостей макромоделі відтворення національного доходу є існування траєкторії з незмінною функціональною структурою (співвідношенням споживання і нагромадження) і постійним темпом приросту $r_0 = \frac{1-c_0}{By(0)}$, де c_0 – задане число, $c_0 < y(0)$.

Для міжгалузевої моделі при заданих векторах $y(0) \geq 0$ і $C_0 \leq Y(0)$ можна поставити питання про існування траєкторії пропорційного зростання (при незмінній галузевій і функціональній структурі) з темпом $r_0 > 0$. Шуканий темп r_0 повинен задовольняти систему з n рівнянь:

$$C_0 = E - r_0 B(t)\left(E - A(t)\right)^{-1} Y\left(0\right)$$

Може виявитися, однак, що отримана структура вектора C_0 неприйнятна з точки зору соціально-економічних критеріїв [3, 39].

4. Міжгалузева динамічна модель і аналіз пропорцій розширеного відтворення

Зв'язок результатів міжгалузевої динамічної моделі і макромоделі розширеного відтворення [8, 54-60] може бути посилений за допомогою класифікації та агрегування галузей за функціональним призначенням продукції, що ними виготовляється. Замість "знеособлених" галузей, представлених тільки порядковими номерами, варто виділяти галузі, що виконують особливі функції в процесі відтворення.

Поділимо все виробництво на три галузі: виробництво знарядь праці (галузь 1), виробництво предметів праці (галузь 2), виробництво предметів споживання (галузь 3). В результаті отримуємо тригалузеву систему, яку можна досліджувати за допомогою міжгалузевої динамічної моделі.

У зазначеній тригалузевій системі лише галузь 1 здійснює капітальні вкладення, галузь 2 забезпечує тільки проміжне споживання, а весь фонд споживання забезпечує галузь 3.

Запишемо систему рівнянь, зважаючи на функціональне призначення продукції трьох галузей:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11}\dfrac{dx_1}{dt} + b_{12}\dfrac{dx_2}{dt} + b_{13}\dfrac{dx_3}{dt}; \\ x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t); \\ x_3(t) = c(t). \end{cases}$$

Підставивши $x_2(t)$ і $x_3(t)$ у перше рівняння, отримаємо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$x_1(t) = \tilde{a}x_1(t) + \tilde{b}\frac{dx_1}{dt} + \tilde{g}_1 c(t) + \tilde{g}_2\frac{dc}{dt},$$

де

$$\tilde{a} = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{b} = b_{11} + \frac{b_{12}b_{21}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{g}_1 = a_{13} + \frac{a_{12}a_{23}}{1 - a_{22}},$$

$$\tilde{g}_2 = b_{13} + b_{12}\frac{a_{23}}{1 - a_{22}}.$$

Завдяки продуктивності матриці A величина $\tilde{a} < 1$. Технологічний темп приросту, який досягається при $c(t) = 0$, дорівнює $\tilde{\lambda} = \dfrac{1 - \tilde{a}}{\tilde{b}}$.

При $c(t) = c_0 e^{rt}$ траєкторія $x_1(t)$ має вигляд:

$$x_1(t) = \left[x_1(0) - \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} \right] e^{\tilde{\lambda} t} + \frac{(\tilde{g}_1 + r\tilde{g}_2)c_0}{1 - \tilde{a} - r\tilde{b}} e^{rt}.$$

Зокрема, при сталому рівні споживання $(r = 0)$ отримуємо:

$$x_1(t) = \left[x_1(0) - \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1 - \tilde{a}} \right] e^{\tilde{\lambda} t} + \frac{\tilde{g}_1 c_0}{1 - \tilde{a}},$$

тобто темп приросту виробництва знарядь праці дуже швидко прямує до величини $\tilde{\lambda}$.

Пропорційне зростання всіх галузей виробництва $x_1(t) = x_i(0) e^{r_0 t}$ $(i = 1,2,3)$ існує при $r_0 = \dfrac{(1 - \tilde{a}) x_1(0) - \tilde{g}_1 c_0}{\tilde{b} x_1(0) + \tilde{g}_2 c_0}$ і при цьому $0 \le r_0 < \tilde{\lambda}$.

При $0 < r < r_0$ темпи приросту виробництва галузей 1 і 2 збільшуються в границі до $\tilde{\lambda}$. Виробництво у 1 та 2 галузях зростає випереджуючими темпами, і їхня частка у валовому продукті неперервно збільшується. Відповідно зростає частка виробничого нагромадження і знижується частка споживання (як і в макромоделях).

При $r > r_0$ темпи приросту виробництва галузей 1 і 2 необмежено зменшуються; відповідні траєкторії виходять за межі допустимої області. Водночас збільшується частка третьої галузі у валовому продукті та фонді споживання – у використовуваному національному доході.

Залежності темпів приросту виробництва знарядь праці і предметів праці від темпу споживання r зображено на рис. 1.

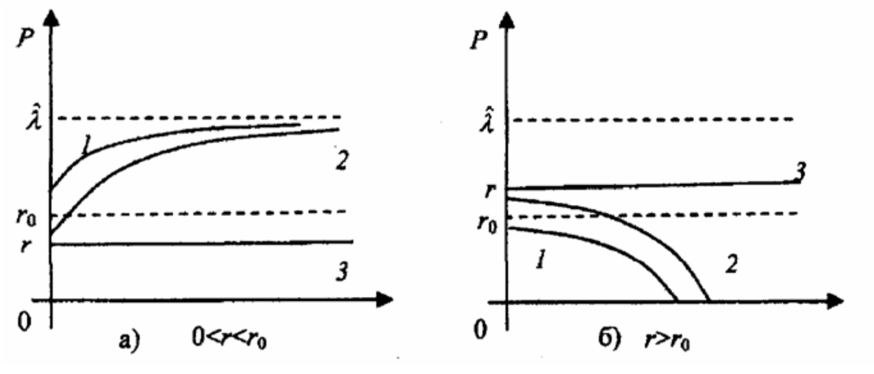
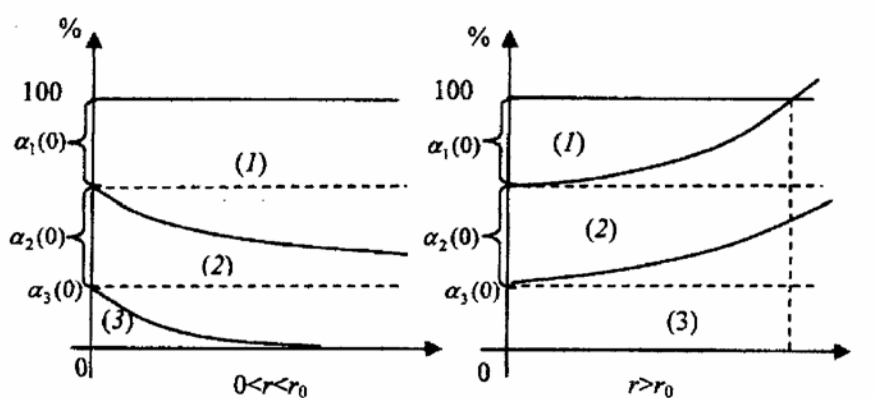


Рис. 1. ***Залежність динаміки темпів приросту виробництва галузей від темпу приросту споживання:***

1 – виробництво знарядь праці; 2 - виробництво предметів праці;
3 - виробництво предметів споживання.

Зміни галузевої структури валового внутрішнього продукту при зміні темпу споживання показано на рис. 2



а) б)

Рис. 2. ***Залежність динаміки галузевої структури валового внутрішнього продукту від темпу приросту споживання:***

α_1 - частка виробництва знарядь праці; α_2 - частка виробництва предметів праці; α_3 - частка виробництва предметів споживання.

При $0 < r < r_0$ (рис. 2. а) частка виробництва знарядь праці зростає, а частка предметів споживання зменшується. При $r > r_0$ (рис. 2. б) структурні зміни протилежні. Частка виробництва предметів праці відносно стійка щодо темпу споживання. Це пояснюється тим, що виробництво предметів праці однаково необхідне при будь-якому співвідношення між виробництвом знарядь праці і предметів споживання, а також між нагромадженням основних виробничих фондів і використанням продукції на невиробничі потреби.

5. Узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі

У динамічній моделі В. Леонтьєва [3, 36-38] зроблено низку припущень, що спрощують, полегшують розв'язок системи диференціальних рівнянь і відповідний теоретичний аналіз. Однак ці припущення звужують можливості коректного перенесення результатів аналізу моделі на економічну дійсність. Поряд з критичною оцінкою припущень розглянутої моделі важливо описати шляхи її удосконалення.

1. Включення умов "необоротності" капітальних вкладень і перехід до системи нерівностей .

В умовах (2) вектор виробничого нагромадження (чистих капітальних вкладень) пов'язаний з приростами виробництва співвідношенням

$$U(t) = B\frac{dX}{dt}.$$

Таке співвідношення передбачає тільки невід'ємні похідні $\frac{dx_j(t)}{dt}$. Якщо $\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$, то $u_{ij} = b_{ij}\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$. Формально це означає повернення ресурсів у баланси продукції за повними нормами капіталомісткості (повне деінвестування), що не відповідає дійсності.

Тому розв'язки систем (2) і (4) можна використовувати тільки тоді, коли вони задовольняють додаткову умову:

$$\frac{dX}{dt} \geq 0. \tag{16}$$

Така умова виконується далеко не для будь-якої траєкторії (2) зокрема, вона порушується:

а) при домінуванні у розв'язку однорідної системи складової з темпом, що відрізняється від технологічного;

б) при зростанні споживання з темпом $r > r_0$;

в) на початковому відрізку інших траєкторій.

Строго кажучи, додаткова умова (16) не є необхідною, адже важливо не заборонити від'ємні прирости, а виключити феномен "оборотності" капітальних вкладень. Тому більш обґрунтованим є безпосереднє включення в модель умов "необоротності" капіталовкладень:

$$u_{ij} = b_{ij}\left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]_+, \tag{17}$$

де

$$\left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]_+ = \begin{cases} \dfrac{dx_j(t)}{dt},\ якщо\ \dfrac{dx_j(t)}{dt} \geq 0; \\ 0,\ якщо\ \dfrac{dx_j(t)}{dt} < 0\ . \end{cases}$$

Відзначимо, що припущення абсолютної необоротності капіталовкладень є надто жорстким. Матеріальні елементи основних виробничих фондів, що вивільняються, можуть частково перерозподілятися. Це можна врахувати наступним чином.

Якщо $\frac{dx_j(t)}{dt} < 0$, то в баланс продукції надходить $\bar{u}_{ij} = \bar{b}_{ij}\frac{dx_j(t)}{dt}$, де $0 \leq \bar{b}_{ij} < b_{ij}$. Однак теоретичне дослідження моделі з такими умовами помітно ускладнюється.

Із урахуванням умови (17) динамічна міжгалузева модель набуває вигляду:

$$X(t) = A(t)X(t) + B(t)\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ + C(t). \tag{18}$$

Однак система рівнянь (18) може не мати допустимих траєкторій, що проходять через задану початкову точку $X(0) \geq 0$. Така ситуація виникає, якщо, наприклад, $C(t) = 0$, а вектор $X(0)$ не належить "конусу допустимості". "Конус допустимості" визначається умовою $B^{-1}(t)\left(E - A(t)\right)X \geq 0$, без виконання якої рівність $\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ = B^{-1}(t)\left(E - A(t)\right)X$ є неможливою. У зв'язку з цим доцільно замінити систему рівнянь (18) системою нерівностей:

$$X(t) \geq A(t)X(t) + B(t)\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ + C(t) \tag{19}$$

Завдяки цьому вдається уникнути багатьох проблем, що виникали при попередньому аналізі.

Так, модель замкнутої виробничої системи

$$X(t) \geq A(t)X(t) + B(t)\left[\frac{dX}{dt}\right]_+ . \tag{20}$$

на відміну від рівняння (8) має розв'язок при будь-якому початковому значенні $X(0) \geq 0$:

$$X(t) = X(0)e^{\lambda t}.$$

Підставивши його в (20), отримують нерівність:

$$X(0) - A(t)X(0) \geq \lambda B(t)X(0),$$

що при всіх λ з проміжку $[0,\ \lambda(X(0))]$, де

$$\lambda(X(0)) = \min_{i \in J} \frac{x_i(0) - \sum_{j \in J} a_{ij}(t)x_j(0)}{\sum_{j \in J} b_{ij}(t)x_j(0)}. \tag{21}$$

Справджується нерівність $\lambda(X(0)) \leq \hat{\lambda}$, яка перетворюється на рівність, якщо вектор $(E - A)X(0)$ пропорційний власному вектору $\hat{K}$, який відповідає $\hat{\lambda}$.

Отже, у моделі замкнутої виробничої системи (20) максимально можливий постійний темп приросту виробництва всіх галузей λ існує при будь-якому початковому стані $X(0) \geq 0$.

Модель (19), що включає траєкторію споживання $C(t) = C_0 e^{rt}$, при не дуже великому початковому векторі споживання має розв'язок $X(t) = X(0)e^{rt}$, який зростає з таким самим темпом, що й $C(t)$. Справді, підставивши $X(t) = X(0)e^{rt}$ і $C(t) = C_0 e^{rt}$ у (19), отримуємо

$$X(0) \geq A(t)X(0) + rB(t)X(0) + C_0.$$

І якщо, наприклад, задане значення C_0 задовольняє нерівність $(E - A)X(0) > C_0$, то максимально можливий темп приросту r_0 дорівнює:

$$r_0 = \min_{i \in J} \frac{x_i(0) - \sum_{j \in J} a_{ij}(t) x_j(0) - c_{0i}}{\sum_{j \in J} b_{ij}(t) x_j(0)}.$$

При цьому окремі компоненти фактичного споживання $\widetilde{C}(t)$ можуть перевищувати заданий закон зростання: $\widetilde{C}(t) = (C_0 + \Delta C_0)e^{rt}$, де вектор $\Delta C_0 \geq 0$, а окремі його компоненти Δc_{0i} дорівнюють: $\Delta c_{0i} = x_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij}(t) x_j(0)$.

Для моделі (19) при слабких обмеженнях на C_0 можна довести існування траєкторії, на якій обсяги виробництва всіх галузей і фактичне споживання зростають з постійним темпом приросту r_0.

2. Урахування резервів виробничих потужностей.

У моделі В. Леонтьєва припускають, що приріст виробництва може бути здійснений тільки за рахунок виробничого нагромадження: з $u_{ij}(t) = 0$ випливає $\frac{dx_j(t)}{dt} = 0$. Насправді розширення виробництва може відбуватися і в результаті більш повного використання наявних виробничих потужностей (основних виробничих фондів).

Позначивши через $M_j(t)$ максимально можливий обсяг виробництва продукції j - ї галузі на діючих основних фондах у році t, можемо ввести умови:

$$x_j(t) \leq M_j(t).$$

І тому, якщо $x_j(t) < M_j(t)$, стає припустимим $u_{ij}(t) = 0$ при $\frac{dx_j(t)}{dt} > 0$.

Отже, введення додаткових умов $x_j(t) \leq M_j(t)$, $j \in J$ могло б уточнити розв’язок системи (2).

Отже, введення додаткових умов , могло б уточнити розв’язок системи (2).

3. Побудова міжгалузевих моделей з інвестиційними лагами.

У моделі В. Леонтьєва, так само як і в найпростішій макромоделі відтворення, передбачено миттєвість перетворення виробничого нагромадження (капітальних вкладень) у прирости виробництва. Надмірна спрощеність цієї умови була відзначена неодноразово.

Природне вдосконалення моделі – включення інвестиційних (зосереджених і розподілених). Так, якщо визначати інвестиційний лаг у кожній j - й галузі як зосереджений і рівний $\bar{\tau}_j$, то система рівнянь виробництва і розподілу продукції (національного доходу) набуває вигляду:

$$x_i(t) = \sum_{j \in J} a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j \in J} b_{ij}(t) \frac{dx_j}{dt}\left(t + \bar{\tau}_j\right) + c_i(t), \quad i \in J. \qquad (22)$$

Інвестиційні лаги можуть диференціюватися не тільки за галузями – “споживачами” капітальних вкладень, але й за матеріально-речовими елементами капітальних вкладень (продукція машинобудування, будівництва і т. ін.).

Позначивши через τ_{ij} лаг капіталовкладень, що надходять з i-ї галузі і забезпечують приріст виробництва в j-й галузі, одержуємо таку систему рівнянь:

$$x_i\left(t\right)=\sum_{j\in J}a_{ij}(t)x_j\left(t\right)+\sum_{j\in J}b_{ij}(t)\frac{dx_j}{dt}\left(t+\bar{\tau}_{ij}\right)+c_i\left(t\right),\quad i\in J. \qquad (23)$$

У динамічну міжгалузеву модель можуть бути включені також і розподілені лаги, при цьому змінюється зміст матриці B.

Методи розв’язування систем диференціальних рівнянь з лагами (запізнілими аргументами) розроблено досить добре, однак якісний аналіз розв’язків істотно ускладнюється.

4. Врахування динаміки коефіцієнтів матеріаломісткості і капіталомісткості виробництва.

Одним з найбільш сильних припущень аналізованої моделі є незмінність у часі матриць матеріальних і капітальних витрат A і B. Завдяки нього вдається зробити низку висновків про властивості траєкторій (зокрема, довести існування технологічного темпу приросту і відповідної траєкторії пропорційного зростання). Але при цьому поза моделлю залишається найважливіший фактор економічної динаміки – науково-технічний прогрес.

Включення в модель матриць $A(t)$ і $B(t)$, що залежать від часу, підвищує її прикладне значення. Теоретичний аналіз узагальненої моделі залишається доступним при досить простих законах зміни $A(t)$ і $B(t)$, наприклад, при рівномірній зміні всіх коефіцієнтів матриці або коефіцієнтів окремих рядків матриці.

6. Оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу

Попередньо ми описували можливості переходу від макроекономічної моделі з екзогенною траєкторією споживання до оптимізаційних моделей, у яких максимізується сумарне споживання (або дисконтоване сумарне споживання) за плановий період. Спробуємо застосувати ці підходи для аналізу міжгалузевої динаміки.

Нехай максимізується сумарний фонд споживання за плановий період

$$\int_0^T GC(t)dt,$$

де порівняння різних споживчих благ здійснюється за допомогою вектора постійних коефіцієнтів $G=\left(g_i\right)>0$. Максимізація цієї функції здійснюється за умов:

$$\begin{cases} X\left(t\right)=A(t)X\left(t\right)+B(t)\dfrac{dX\left(t\right)}{dt}+C\left(t\right); \\ \dfrac{dX\left(t\right)}{dt}\geq 0; \\ X\left(0\right)=X_0. \end{cases} \qquad (24)$$

Включення умови $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$ гарантує “необоротність” капіталовкладень, але, разом з тим, істотно звужує область вибору.

Із (24) виведемо співвідношення для $Y(t)$, $\frac{dY(t)}{dt}, U(t)$:

$$U(t) = B(t)\left(E - A(t)\right)^{-1} \frac{dY(t)}{dt};$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = \left(E - A(t)\right) B^{-1}(t) U(t);$$
$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(E - A(t)\right)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} = B^{-1}(t) U(t).$$

Зауважимо, що коли $\frac{dY(t)}{dt} = B^{-1}(t)U(t) \geq 0$, то і $U(t) \geq 0$.

Сформулюємо задачу оптимального управління:

$$\begin{cases} \int_0^T G\left[Y(t) - U(t)\right] dt \to \max; \\ \frac{dY(t)}{dt} = \left(E - A(t)\right) B^{-1}(t) U(t); \\ U(t) \leq Y(t); \\ B^{-1}(t) U(t) \geq 0; \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \qquad (25)$$

Оптимізаційна модель дає змогу знаходити такі траєкторії, які дають більшу (не меншу) величину сумарного споживання $\int_0^T GC(t)dt$, порівняно з будь-якою екзогенною траєкторією споживання (зокрема, такою, що зростає постійними темпами), і котра задовольняє умови (24).

При аналізі макроекономічної задачі оптимального управління максимуму сумарного споживання досягають шляхом зосередження всіх ресурсів національного доходу в різні моменти часу або цілком на споживанні, або на виробничому нагромадженні при миттєвій (релейній) зміні режиму відтворення.

Досліджуючи задачі (25) з використанням принципу максимуму Понтрягіна [8, 193-195], виявляють властивості, аналогічні властивостям макроекономічної задачі оптимізації національного доходу із незмінною нормою нагромадження.

Існує величина $T_0 > 0$ така, що:

а) коли $T \leq T_0$, то виробництво не збільшується й увесь національний дохід споживається:

$$y_i^*(t) = c_i^*(t) = y_i(0), \quad u_i^o(t) = 0, \ i \in J;$$

б) коли $T > T_0$, то аналогічна ситуація має місце наприкінці планового періоду на відрізку $[T - T_0, \ T_0]$, де весь національний дохід цілком витрачається на споживання.

Виробниче нагромадження здійснюється на відрізку $[0, \ T - T_0]$, однак не може гарантувати, що $u_i^*(t) > 0$ для всіх галузей.

Особливість оптимальної траєкторії міжгалузевої моделі полягає також у тому, що в кожен момент часу продукція певної галузі не обов'язково має бути витрачена або тільки на споживання, або тільки на нагромадження. Різні галузі "поводять" себе по-різному. Для будь-якого $t \in [0, T_0]$ виділяють дві підмножини (можливо такі, що перетинаються) галузей $J_1(t), \ j_2(t) \subseteq J$. При $i \subseteq J_1(t)$ всю продукцію, що виходить зі сфери виробництва, спрямовують на нагромадження:

$$u_i^*(t) = y_i^*(t).$$

При $i \subseteq J_1(t)$ обсяги виробництва не зростають:

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt} = 0.$$

Зокрема, при $t > T - T_0$ маємо $J_2(t) = J.$

Отже, поведінка оптимального розв'язку істотно залежить від тривалості планового періоду. При досить великій величині T оптимальна траєкторія обов'язково містить скачкоподібні зміни споживання і нагромадження, принаймні для продукції деяких галузей. Моменти цих структурних передумов визначаються більш складними залежностями, ніж у макроекономічній моделі.

Для пом'якшення різких змін (згладжування) оптимальної траєкторії задачі (25) можна використовувати ряд методів:

а) поділ споживання на екзогенно та ендогенно зумовлені частини й умови неперервного зростання споживання (зокрема максимізація темпу r);

б) задання нижніх і верхніх меж норми виробничого нагромадження .

Однак в оптимізаційних міжгалузевих моделях число різких змін траєкторії є у багато разів більшим, ніж у макроекономічних моделях, і тому, здебільшого, зазначених методів буде недостатньо. Для згладжування оптимальних траєкторій потрібно застосовувати більш диференційовані і гнучкі регулятори.

Наприклад, можна пов'язати між собою вектори $C(t)$ і $U(t)$ таким чином, щоб уникнути зміни структури кінцевої продукції. У найпростішому випадку $c_i(t) = h_i y_i(t)$, де $0 \leq h_i \leq 1$ – незмінні норми споживання продукції галузей. Тоді

$u_i(t) = (1-h_i)y_i(t)$. Коефіцієнти h_i можна розглядати і як змінні величини. Зокрема, прийнявши $h_i(t) = h_i(0)\pi(t)$, де $\pi(t) > 0$, будемо контролювати не тільки структуру використання продукції кожної галузі, але й загальне співвідношення між споживанням і нагромадженням. Якщо встановлюється $\pi(t) > 1$, то це означає збільшення норми споживання, порівняно з початковим моментом часу, якщо ж вважати $\pi(t) < 1$, то збільшується частка нагромадження.

У більш загальному вигляді

$$C(t) = H(t)Y(t),$$

де $H(t) = h_{ij}(t)$ – змінна в часі матриця взаємозв'язку споживання і використовуваного національного доходу; елементи матриці $H(t)$ беруть з деякого фіксованого класу гладких функцій, в межах якого і здійснюють оптимізацію.

Очевидно, що приєднання такого виду умов до задачі (25) неминуче зменшує значення цільової функції споживання. Однак забезпечується гладкість динаміки споживання, нагромадження і виробництва. Паралельно зменшується сильна залежність оптимальних розв'язків від тривалості планового періоду і знижується гострота проблеми "хвоста" планового періоду (зменшення деформації структури виробництва і розподілу продукції наприкінці періоду).

Таким чином, запропоновано узагальнені динамічні моделі замкнутої виробничої системи, які дозволяють в реальному часі виконувати аналіз економічного зростання при різних траєкторіях споживання. Зокрема, виконано аналіз пропорцій розширеного відтворення та узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі. Створено оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу та запропоновано ефективний обчислювальний метод реалізації цих моделей.

Література

1. *Григорків В.С. Моделювання економіки. Частина 2: Навч. посібник. – Чернівці: Рута, 2006. –100с.*
2. *Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М., 1975.*
3. *Кабак А.Ф. Економіко-математичні методи і моделі / Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 164 с.*
4. *Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.,1999.*
5. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. – М., 2000.*
6. *Недашковський М.О., Ковальчук О.Я. Обчислення з – матрицями. К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.*
7. *Беллман Р. Теория матриц. / Науч. пособие. – М., 1985. – 366 с.*
8. *Жуков С.А., Остапчук В.С., Сторубльов О.І. Матемитичні методи та моделі в економіці / Навч. посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2002. – 231 с.*

Редакція отримала матеріал 25 грудня 2008 р.